TITLE:
曲面の0-サイクルについて

AUTHOR(S):
水上, 真澄

CITATION:
水上, 真澄. 曲面の0-サイクルについて. 代数幾何学シンポジューム記録 1977, 1977: 207-219

ISSUE DATE:
1977

URL:
http://hdl.handle.net/2433/201930

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

代数幾何学シンポジウム記録
1977年度 pp.207-219

曲面の0-サイクルについて

東大 理 水上真澄

これから考える代数多様体の基礎体は複素数体$\mathbb{C}$とする。

最初に井上政久氏に教えていただいた次のような一般型代数曲面Sを構成する。すなわちSは極小曲面であって、幾何種数$p_g(S)=0$不正則数$q(S)=0$，$(K_S^2)=2,3,4,5$または6で，どの値も実際にとるものがある。

次にS上の0-サイクルを考える。代数多様体Xの次数0の0-サイクルの有理同値類のなす群を$A_0(X)$で表わす。$\alpha : A_0(X) \to \mathrm{Alb}(X)$を自然な全射準同形とするとき、Xが$p_g=0$の曲面ならば$\alpha$は同形であるというS.Blochの予想がある。Xの小平次元$\kappa(X)<2$のとき

は、S. Bloch, A. Kas & D. Lieberman [2] によって証明された。$K(X)=2$ のときは、そのような曲面がいまだに十分知られていないこともあるが、猪瀬博司氏によっていくつかの例が調べられただけである。ここで構成されるSについても $A_0(S)=\mathrm{alb}(S)=0$ がいえる。

Eは $\mathbb{P}^2$ 内で次の方程式で定義される楕円曲線とする。

(1) $y^2z = x(x-z)(x-\lambda^2 z)$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $\lambda \neq 0, \pm 1, \infty$

$(x:y:z)=(0:1:0)$ となる点を原点に選んで、Eをアーベル多様体とみなせば、位数2の点の座標は $(0:0:1)$, $(1:0:1)$ と $(\lambda^2:0:1)$ である。E上の有理関数

$$u = \frac{x+\lambda z}{x-\lambda z} \quad \text{をとり} \quad a = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}$$

とおく。Eの元の -1 倍 σ と $(0:0:1)$ による移動 τ は

$$\sigma : (x:y:z) \longrightarrow (x:-y:z)$$

$$\tau : (x:y:z) \longrightarrow (\lambda^2 xz : -\lambda^2 yz : x^2)$$

で与えられる。$\sigma(u)=u$, $\tau(u)=-u$ であることを注意しておく。

E_1, E_2, E_3 を (1) で λ をそれぞれ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ で置き換えて得られる楕円曲線とする。E_i $(i=1,2,3)$ に対して上と同様に $u_i, a_i, \sigma_i, \tau_i$ が定義される。$A=E_1\times E_2\times E_3$ とおく。u_i, σ_i, τ_i から A 上の関数と A の自己同形が自然に定義されるが、それを同じ記号 u_i, σ_i, τ_i で表わす。$A\times\mathbb{P}^1$ 内での $u_1u_2u_3$ のグラフを Γ とする。

$$X_c=(\Gamma.(A\times c))_{A\times\mathbb{P}^1} \quad (c \text{ は } \mathbb{P}^1 \text{の点})$$

$\mathcal{E}=\{\pm1, \pm a_1, \pm a_2, \pm a_3, \pm a_1a_2, \pm a_2a_3, \pm a_3a_1, \pm a_1a_2a_3\}$ とする。

命題1（井上） $c\notin\mathcal{E}\cup\{0,\infty\}$ のとき X_c は非特異既約曲面（case I）。

$c\in\mathcal{E}$ のとき X_c の特異点は $4n$ 個の通常2重点だけで、X_c は既約曲面（case II）。（$n=1,2,3$ または4。$\mathcal{E}$ の元として16通りに表わされた数のうち c と等しいものの個数が n である。）

証明．アフィン開集合ごとに X_c の方程式を局所座標で書いてみれば、直ちにわかる。

case II のとき、X_c の各特異点で A を blowing-up したものを $\widetilde{A}$，$\widetilde{A}$ の中で X_c の固有逆像を $\widetilde{X}_c$ とすれば $\widetilde{X}_c$ は非特異である。簡単のため X で，case I のとき X_c を、case II のとき $\widetilde{X}_c$ を表わすものとする。

命題 2（井上） i) $p_g(X)=10$，$q(X)=3$，$(K_X^2)=E(X)=48$。

$E(X)$ は X のオイラー数である。

ii) $H^0(A,\Omega^1) \xrightarrow{\sim} H^0(X,\Omega^1)$

iii) X は一般型の極小曲面である。

証明．i) case I。X は A 上で $2(c_1\times E_2\times E_3+E_1\times c_2\times E_3+E_1\times E_2\times c_3)$（$c_i$ は E_i の点，$i=1,2,3$）と代数的に同値だから $(K_X^2)_X=(X^3)_A=48$。$2X$ は A の very ample divisor である。次の完全列を考える。

(2) $\quad 0 \to \mathcal{O}_A(K_A) \to \mathcal{O}_A(K_A+X) \to \mathcal{O}_X(K_X) \to 0$

これからコホモロジーの完全系列が得られるが，

$$\dim H^0(A, \mathcal{O}_A) = \dim H^3(A, \mathcal{O}_A) = 1$$

$$\dim H^1(A, \mathcal{O}_A) = \dim H^2(A, \mathcal{O}_A) = 3$$

$$\dim H^0(A, \mathcal{O}_A(X)) = 8$$

$$\dim H^i(A, \mathcal{O}_A(X)) = 0 \qquad (i \geqq 1)$$

であるから（cf. Mumford [3]）

$$p_g(X) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X)) = 10$$

$$q(X) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X(K_X)) = 3$$

を得る。

case II 。 $\mathcal{O}_{\tilde{A}}(K_{\tilde{A}} + X)$ は $\mathcal{O}_A(X_c)$ の引きもどしにほかならない。したがって

$$(K_X^2)_X = ((K_{\tilde{A}} + X)^2 . X)_{\tilde{A}} = (X_c^3)_A = 48 \text{ 。}$$

また (2) で A を $\widetilde{A}$ に取り換え、Leray のスペクトル列を使えば、case I と全く同様の計算により $p_g(X) = 10$, $q(X) = 3$ を得る。

どちらの場合も $E(X)$ は Noether の公式

$$E(X) + (K_X^2) = 12(p_g(X) - q(X) + 1)$$

から求められる。

ii) $\iota : X \longrightarrow A$ とすれば

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr] & \circlearrowleft & A \\ & X_c \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$\iota^* : H^0(A, \Omega^1) \longrightarrow H^0(X, \Omega^1)$ は単射であり，

$$\dim H^0(A,\Omega^1)=\dim H^0(X,\Omega^1)=3$$

だから ι^* は同形写像である。

iii) X 上には $4n$ ($n=0,1,2,3$ または4) 個の有理曲線があるが、これらは第1種例外曲線ではないし，$p_g(X)>0$，$(K_X^2)>0$ だから、X は一般型の曲面である。　　　　(証明終)

σ_1，σ_2，σ_3，$\tau_1\tau_2$，$\tau_2\tau_3$ は X の自己同形を定める。これらは X の自己同形群の中で $(\mathbb{Z}/2)^5$ と同形な群をつくる。

$G=\langle\sigma_1\tau_1\tau_2,\ \sigma_2\tau_2\tau_3,\ \sigma_3\tau_3\tau_1\rangle$ とおく。

命題3 (井上) i) case I。G は X に固定点を持たない。$S=X/G$ とすると

$p_g(S)=q(S)=0$，$(K_S^2)=E(S)=6$

case II。$Y=X/\langle\sigma_1\sigma_2\sigma_3\rangle$ とおく。Y は非特異曲面。$(K_Y^2)=24-4n$，$E(Y)=24+4n$。

$\langle\sigma_1\tau_1\tau_2,\ \sigma_2\tau_2\tau_3\rangle$ は Y の固定点を持たない自己同形群となり、$S=Y/\langle\sigma_1\tau_1\tau_2,\sigma_2\tau_2\tau_3\rangle=X/G$ とすると

$p_g(S)=q(S)=0$，$(K_S^2)=6-n$，$E(S)=6+n$

($n=1,2,3$ または4)

ii) S は一般型極小曲面である。

証明、 i) case I 。 G の単位元以外の7つの元それぞれについて、固定点を持たないことが確かめられる。したがって S は非特異で、
$(K_S^2) = E(S) = 6$ 。

case II 。 G の元で X に固定点を持つのは、単位元以外には $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ だけであり、$\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ は blowing-up で生じた有理曲線 F_i $(1 \leqq i \leqq 4n)$ の各点を固定する。Y が非特異になるのはアフィン開集合で方程式を具体的に調べればわかる。
$f : X \to X/\langle\sigma_1\sigma_2\sigma_3\rangle = Y$ とすると

$$K_X = f^*(K_Y) + \sum_{i=1}^{4n} F_i$$

$(F_i^2) = -2$, $(K_X . F_i) = 0$, $(K_X^2) = 48$
より

$$(K_Y^2) = \frac{1}{2}(f^*(K_Y)^2) = \frac{1}{2}((K_X - \sum_{i=1}^{4n} F_i)^2) = 24 - 4n$$

$$E(Y) = \frac{1}{2}(E(X) - 2 \times 4n) + 2 \times 4n = 24 + 4n$$

S は Y を固定点を持たない位数4の群で割ったものだから

$$(K_S^2) = 6 - n \quad , \quad E(S) = 6 + n \text{。}$$

case I , case II ともに

$q(S) = \dim H^0(S, \Omega^1) = \dim H^0(X, \Omega^1)^G = 0$

$p_g(S) = 0$ は Noether の公式によってわかる。

ii) S上に第1種例外曲線のないことは、case I のときはS上には有理曲線は存在しないし、case II のときはS上の任意の既約曲線Cについて $(K_S . C) \geqq 0$ であることが、$\pi : X \to S$ とするとき、$|2\pi^*(K_S)|$ の2つの因子で F_i 以外に共通成分のないものがとれることからわかる。どちらの場合も $\dim H^0(S, \mathcal{O}(16K_S)) > 0$, $(K_S^2) > 0$ だから、Sは一般型の極小曲面である。　　　　（証明終）

以上で曲面の構成が完了した。次に $A_0(S) = 0$ を示すが、証明には次の補題が大きな役割を果たす。

補題（猪瀬）Gを曲面Xの自己同形からなる有限群、Yを商曲面 X/G の非特異モデルとする。$g \in G$ の定める $\mathrm{End}(A_0(X))$ の元を g_* とすれば、$A_0(Y) = 0$ となる必要十分条件は $\mathrm{End}(A_0(X))$ での等式 $\sum_{g \in G} g_* = 0$ が成り立つことである。

証明は猪瀬氏の論文を御覧ください。

命題4. $A_0(S)=0$.

証明. 補題により

(3) $\quad \sum_{g\in G} g_* = (1_* + (\sigma_1\tau_1\tau_2)_*)(1_* + (\sigma_2\tau_2\tau_3)_*)(1_* + (\sigma_3\tau_3\tau_1)_*) = 0$

を示せばよい。

$X/\langle\sigma_1\rangle$ は $E_2\times E_3$ と, $X/\langle\sigma_1,\sigma_2\rangle$ は $\mathbb{P}^1\times E_3$ と, $X/\langle\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\rangle$ は $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ とそれぞれ双有理同形である。同様にして、H が $\langle\sigma_1,\sigma_2\tau_1\tau_2,\sigma_3\rangle$, $\langle\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\tau_1\tau_2\rangle$, または $\langle\sigma_1,\sigma_2\tau_1\tau_2,\sigma_3\tau_1\tau_2\rangle$ のいずれかのとき X/H は有理曲面である。

したがって

(4) $\quad (1_*+\sigma_{1*})(1_*+\sigma_{2*}+\sigma_{3*}+(\sigma_2\sigma_3)_*)=0$,

(5) $\quad (1_*+\sigma_{1*})(1_*+(\sigma_2\tau_1\tau_2)_*+\sigma_{3*}+(\sigma_2\sigma_3\tau_1\tau_2)_*)=0$,

(6) $\quad (1_*+\sigma_{1*})(1_*+\sigma_{2*}+(\sigma_3\tau_1\tau_2)_*+(\sigma_2\sigma_3\tau_1\tau_2)_*)=0$,

(7) $\quad (1_*+\sigma_{1*})(1_*+(\sigma_2\tau_1\tau_2)_*+(\sigma_3\tau_1\tau_2)_*+(\sigma_2\sigma_3)_*)=0$。

(4) − (5) + (6) − (7) を計算すると

$(1_*+\sigma_{1*})(2\sigma_{2*}-2(\sigma_2\tau_1\tau_2)_*) = 2\sigma_{2*}(1_*+\sigma_{1*})(1_*-(\tau_1\tau_2)_*)=0$

$A_0(X)$ は可除である (cf. Bloch [1])。また $\sigma_{2*}\sigma_{2*}=1_*$ だから

(8) $\quad (1_*+\sigma_{1*})(1_*-(\tau_1\tau_2)_*)=0$

を得る。添数の 2 と 3 を取り換えて

$$(9)\qquad (1_* + \sigma_{1*})(1_* - (\tau_1\tau_3)_*) = 0 \quad 。$$

(8) と (9) から

$$(10)\qquad \begin{aligned} &(1_* + \sigma_{1*})(1_* - (\tau_1\tau_2)_* + (\tau_1\tau_2)_*(1_* - (\tau_1\tau_3)_*)) \\ &= (1_* + \sigma_{1*})(1_* - (\tau_2\tau_3)_*) = 0 \quad 。\end{aligned}$$

(8), (9) と (10) は σ_1 を σ_2 または σ_3 で置き換えても成り立つ。

$$(11)\qquad \begin{aligned} &(1_* + \sigma_{1*} - \sigma_{1*}(1 + \sigma_{2*}) + (\sigma_1\sigma_2)_*(1_* + \sigma_{3*}))(1_* - (\tau_1\tau_2)_*) \\ &= (1_* + (\sigma_1\sigma_2\sigma_3)_*)(1_* - (\tau_1\tau_2)_*) = 0 \quad 。\end{aligned}$$

同様に

$$(12)\qquad (1_* + (\sigma_1\sigma_2\sigma_3)_*)(1_* - (\tau_2\tau_3)_*) = 0 \quad 。$$

ここで (3) 式の左辺を計算すると

$$\begin{aligned} &(1_* + (\sigma_1\tau_1\tau_2)_*)(1_* + (\sigma_2\tau_2\tau_3)_*)(1_* + (\sigma_3\tau_3\tau_1)_*) \\ &= (1_* + (\sigma_1\tau_1\tau_2)_*)(1_* + (\sigma_2\tau_2\tau_3)_*)(1_* + (\sigma_1\sigma_2\sigma_3)_*) \\ &= (1_* + \sigma_{1*})(1_* + \sigma_{2*})(1_* + (\sigma_1\sigma_2\sigma_3)_*) \qquad \text{((11), (12) を使った)} \\ &= (1_* + \sigma_{1*})(1_* + \sigma_{2*})(1_* + \sigma_{3*}) \end{aligned}$$

最後の式は (4) から 0 であることがわかる。

(証明終)

S は X_C を適当な群 G で割ることにより得られたが、C が一般の場合には G のとり方に

自由度はほとんどない。ところが(1)の楕円曲線の自己同形として、2等分点$(1:0:1)$による移動をρとすれば、$\rho(u)=\frac{a}{u}$ となるから$c=\sqrt{a_1a_2a_3}$ のとき $\rho_1\rho_2\rho_3$ は $X=X_{\sqrt{a_1a_2a_3}}$ (方程式$u_1u_2u_3=\sqrt{a_1a_2a_3}$) の自己同形を引き起こす。簡単のため $\sqrt{a_1a_2a_3}$ を ε とする。GとしてXの自己同形群 $\langle\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\tau_1\tau_2,\tau_2\tau_3,\rho_1\rho_2\rho_3\rangle$ の部分群で

i) GはXに固定点を持たない。

ii) $\dim H^0(X,\Omega^1)^G=0$

をみたすものをとる。このようなGは全部で40個ある。($\langle\sigma_1t_1,\sigma_2t_2,\sigma_3t_3\rangle$ の型のものが26個、$\langle\sigma_1\sigma_2t_1,\sigma_2\sigma_3t_2,t_3\rangle$ の型のものが14個、$t_1,t_2,t_3\in\langle\tau_1\tau_2,\tau_2\tau_3,\rho_1\rho_2\rho_3\rangle$) $X/G=S$ とおく。

命題5. Sを上で定義したものとすると

i) $p_g(S)=q(S)=0$, $(K_S^2)=E(S)=6$.

ii) Sは一般型極小曲面。

iii) $A_0(S)=0$

証明. i), ii) は命題3の case I と同様にして証明される。

iii) のためには

$$(13) \quad (1_* + \sigma_{1*})(1_* - (\rho_1\rho_2\rho_3)_*) = (1_* + \sigma_{2*})(1_* - (\rho_1\rho_2\rho_3)_*) = (1_* + \sigma_{3*})(1_* - (\rho_1\rho_2\rho_3)_*) = 0$$

$$(14) \quad (1_* + (\sigma_1\sigma_2)_*)(1_* + (\sigma_2\sigma_3)_*)(1_* + (\tau_1\tau_2)_*)(1_* + (\tau_2\tau_3)_*)(1_* + (\rho_1\rho_2\rho_3)_*) = 0$$

を示せば、あとは初等的計算によっていえる。$Y_1 = X/\langle\sigma_1, \sigma_2\rho_1\rho_2\rho_3, \sigma_3\rho_1\rho_2\rho_3\rangle$, $Y_2 = X/\langle\sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_3, \tau_1\tau_2, \tau_2\tau_3, \rho_1\rho_2\rho_3\rangle$ はともにエンリケス曲面と双有理同値である。エンリケス曲面 Y については $p_g(Y) = q(Y) = 0$ $\kappa(Y) = 0$ だから、最初にも述べたように $A_0(Y) = 0$ が知られている。(cf. [2])
$A_0(Y_2) = 0$ から (14) が成り立ち、(13) の最初の式 $= 0$ は (8) を示したときと同様に (4), (5), (6) は $\tau_1\tau_2$ を $\rho_1\rho_2\rho_3$ で置き換えて成り立つことと $A_0(Y_1) = 0$ から (7) の $\tau_1\tau_2$ を $\rho_1\rho_2\rho_3$ で置き換えた式が成り立つことからわかる。　(証明終)

丸山直昌氏が (13), (8), (9), (10) はアーベルの定理によって証明できることを注意してくれた。

References

[1] S.Bloch: Some Elementary Theorems about Algebric Cycles on Abelian Varieties, Inv. Math. 37 (1976) 215-228

[2] S.Bloch, A.Kas and D.Lieberman: Zero cycles on surfaces with $p_g=0$, Compositio Math. 33 (1976) 135-145

[3] D.Mumford: Abelian Varieties, Oxford Univ. Press (1970)